

文章编号:1005-3085(2010)01-0099-06

广义 Vandermonde 方程组的有效快速算法*

赵良东, 徐 仲, 陆 全

(西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

摘 要: 基于求解 Vandermonde 方程组的 Bjorck-Pereyra 算法, 本文给出了求解广义 Vandermonde 方程组的有效快速算法, 所需的计算量为 $O(n^2)$ 。数值算例表明, 与求解 Vandermonde 方程组的 Gohberg-Kailath-Koltracht 算法和 Gauss 消元法相比, 本文的算法具有更高的计算精度。

关键词: Vandermonde 矩阵; 广义 Vandermonde 矩阵; 线性方程组; 快速算法

分类号: AMS(2000) 15A23; 65F30

中图分类号: O241.6

文献标识码: A

1 引言

定义 设 a_1, a_2, \dots, a_n 是 n 个实数或复数, 称如下的 n 阶方阵

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_{n-1}^n & a_n^n \end{pmatrix} \quad (1)$$

为广义 Vandermonde 矩阵。

许多实际的问题可以转化为广义 Vandermonde 矩阵的相关求解问题, 如要构造次数不超过 n 的缺项多项式 $g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{n-2}x^{n-2} + c_nx^n$ 在 n 个点 a_1, a_2, \dots, a_n 处满足插值条件 $g(a_k) = f_k (k = 1, 2, \dots, n)$, 这一问题转化为求解广义 Vandermonde 方程组 $V^T c = f$, 其中 $c = (c_0, \dots, c_{n-2}, c_n)^T$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ 。如果按照一般的方法, 如 Gauss 消元法, 求解广义 Vandermonde 方程组, 所需运算量为 $O(n^3)$ 。近年来, 针对一些特殊矩阵出现了一批求解相应计算问题的快速算法, 其运算量达到 $O(n^2)$ 或更低^[1-8]。对于由 Vandermonde 矩阵 $A = (a_j^{i-1})_{i,j=1}^n$ 推广得到的所谓 Vandermonde 型矩阵 (本文的广义 Vandermonde 矩阵是其特例), 文献 [2] 利用这类矩阵的位移结构给出了求解相应方程组的快速算法: Gohberg-Kailath-Koltracht 算法, 但由于 Vandermonde (型) 矩阵一般是严重病态的, 用所给快速算法和 Gauss 消元法求解相应方程组的阶数很低。文献 [1] 利用 Newton 插值多项式构造了求解 Vandermonde 方程组的有效快速算法: Bjorck-Pereyra 算法。本文通过将 n 阶广义 Vandermonde 矩阵升阶为 $n+1$ 阶的 Vandermonde 矩阵, 并利用分块处理技巧

收稿日期: 2008-06-26. 作者简介: 赵良东 (1984年7月生), 男, 硕士, 研究方向: 特殊矩阵的快速算法.

*基金项目: 国家自然科学基金 (10802068); 陕西省自然科学基金 (2006A05).

和求解 Vandermonde 方程组的 Bjorck-Pereyra 算法, 构造出了求解广义 Vandermonde 方程组的快速算法, 所需的运算量为 $O(n^2)$ 。数值算例表明, 与 Gauss 消元法和 Gohberg-Kailath-Koltracht 算法相比, 本文的算法具有更高的计算精度。

2 快速算法推导

考虑求解广义 Vandermonde 方程组

$$V^T x = f, \quad Vy = g, \quad (2)$$

其中 V 是式 (1) 的广义 Vandermonde 矩阵, 而

$$x = (x_1, \dots, x_n)^T, \quad y = (y_1, \dots, y_n)^T, \quad f = (f_1, \dots, f_n)^T, \quad g = (g_1, \dots, g_n)^T.$$

构造 $n+1$ 阶 Vandermonde 矩阵

$$\tilde{V} = (a_j^{i-1})_{i,j=1}^{n+1}, \quad (3)$$

其中 $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ 两两互异, 且 $a_{n+1} \neq 0$ 。设 $P = (e_1, \dots, e_{n-1}, e_{n+1}, e_n)$, 其中 e_i 是第 i 个分量为 1, 其余分量为 0 的 $n+1$ 维列向量。则有

$$P^T \tilde{V} = \begin{pmatrix} V & \alpha \\ \beta^T & r \end{pmatrix}, \quad (4)$$

其中

$$\alpha = (1, a_{n+1}, \dots, a_{n+1}^{n-2}, a_{n+1}^n)^T, \quad \beta^T = (a_1^{n-1}, a_2^{n-1}, \dots, a_{n-1}^{n-1}, a_n^{n-1}), \quad r = a_{n+1}^n.$$

令

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} I_n & \alpha \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} P^T \tilde{V},$$

结合式 (4) 可得

$$\hat{V} - \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} e_{n+1}^T = \begin{pmatrix} V + \alpha \beta^T & r \alpha \\ \beta^T & r \end{pmatrix}.$$

上式两边求逆, 并利用 Sherman-Morrison 公式和分块矩阵求逆公式得

$$\hat{V}^{-1} + \frac{1}{1 - e_{n+1}^T \hat{V}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}} \hat{V}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} e_{n+1}^T \hat{V}^{-1} = \begin{pmatrix} V^{-1} & -V^{-1} \alpha \\ -\frac{1}{r} \beta^T V^{-1} & \frac{1}{r} (1 + \beta^T V^{-1} \alpha) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

设

$$\tilde{s} = (s_1, \dots, s_{n+1})^T, \quad \tilde{t} = (t_1, \dots, t_{n+1})^T, \quad \tilde{w} = (w_1, \dots, w_{n+1})^T, \quad \tilde{z} = (z_1, \dots, z_{n+1})^T$$

分别是 Vandermonde 方程组

$$\tilde{V} \tilde{s} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{V} \tilde{t} = e_{n+1}, \quad \tilde{V} \tilde{w} = \tilde{g}, \quad \tilde{V} \tilde{z} = \tilde{h} \quad (6)$$

的解向量，其中

$$\tilde{g} = (g_1, \cdots, g_{n-1}, 0, g_n)^T, \quad \tilde{h} = (1, a_{n+1}, \cdots, a_{n+1}^{n-2}, 0, a_{n+1}^n)^T.$$

式 (5) 两边右乘 $\begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}$ 以及式 (5) 取转置再右乘 $\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$ ，可得以下两式

$$\hat{V}^{-1} \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{1 - e_{n+1}^T \hat{V}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}} \hat{V}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} e_{n+1}^T \hat{V}^{-1} \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\frac{1}{r} \beta^T y \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\hat{V}^{-T} \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{1 - (\alpha^T \ 0) \hat{V}^{-T} e_{n+1}} \hat{V}^{-T} e_{n+1} (\alpha^T \ 0) \hat{V}^{-T} \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -\alpha^T x \end{pmatrix}. \quad (8)$$

注意到

$$\hat{V}^{-1} \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{w}, \quad \hat{V}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{z}, \quad \hat{V}^{-T} \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s_n - \alpha^T s \end{pmatrix}, \quad V^{-T} e_{n+1} = \begin{pmatrix} t \\ t_n - \alpha^T t \end{pmatrix},$$

其中

$$s = (s_1, \cdots, s_{n-1}, s_{n+1})^T, \quad t = (t_1, \cdots, t_{n-1}, t_{n+1})^T, \\ w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^T, \quad z = (z_1, z_2, \cdots, z_n)^T.$$

则由式 (7) 和 (8) 可得广义 Vandermonde 方程组 (2) 的解为

$$x = s + \frac{\alpha^T s}{1 - \alpha^T t} t, \quad y = w + \frac{w_{n+1}}{1 - z_{n+1}} z. \quad (9)$$

式 (6) 的 Vandermonde 方程组可直接由 Bjorck-Pereyra 算法求解，综上可得如下的快速算法。

算法 1 求解广义 Vandermonde 方程组 $V^T x = f$ 。

$$\alpha_i = a_{n+1}^{i-1} \ (i = 1, 2, \cdots, n-1), \quad \alpha_n = a_{n+1}^n; \\ c_j^{(1)} = f_j, \quad p_j^{(1)} = 0 \ (j = 1, 2, \cdots, n), \quad c_{n+1}^{(1)} = 0, \quad p_{n+1}^{(1)} = 1.$$

对 $k = 1, 2, \cdots, n$ ，有

$$c_j^{(k+1)} = \frac{c_j^{(k)} - c_{j-1}^{(k)}}{a_j - a_{j-k}}, \quad p_j^{(k+1)} = \frac{p_j^{(k)} - p_{j-1}^{(k)}}{a_j - a_{j-k}}, \quad j = k+1, k+2, \cdots, n+1, \\ s_{n+1}^{(n+1)} = c_{n+1}^{(n+1)}, \quad t_{n+1}^{(n+1)} = p_{n+1}^{(n+1)}.$$

对 $k = n, \dots, 2, 1$, 有

$$\begin{aligned} s_k^{(k)} &= c_k^{(k)} - a_k s_{k+1}^{(k+1)}, & s_j^{(k)} &= s_j^{(k+1)} - a_k s_{j+1}^{(k+1)}, & j &= k+1, \dots, n, \\ s_{n+1}^{(k)} &= s_{n+1}^{(k+1)}, & t_k^{(k)} &= p_k^{(k)} - a_k t_{k+1}^{(k+1)}, & t_j^{(k)} &= t_j^{(k+1)} - a_k t_{j+1}^{(k+1)}, & j &= k+1, \dots, n, \\ t_{n+1}^{(k)} &= t_{n+1}^{(k+1)}, & s_j &= s_j^{(1)}, & t_j &= t_j^{(1)}, & j &= 1, 2, \dots, n+1, \end{aligned}$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i s_i + \alpha_n s_{n+1}, \quad \mu = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i t_i + \alpha_n t_{n+1}, \quad x_n = s_{n+1} + \sigma t_{n+1} / (1 - \mu),$$

$$x_i = s_i + \sigma t_i / (1 - \mu), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

该算法需 $(5n^2/2) + (9n/2) + 1$ 次乘除运算和 $3n^2 + 7n - 2$ 次加减运算。

算法2 求解广义 Vandermonde 方程组 $Vy = g$ 。

$$\begin{aligned} d_j^{(1)} &= g_j, & q_j^{(1)} &= a_{n+1}^{j-1}, & j &= 1, 2, \dots, n-1, \\ d_n^{(1)} &= q_n^{(1)} = 0, & d_{n+1}^{(1)} &= g_n, & q_{n+1}^{(1)} &= a_{n+1}^n. \end{aligned}$$

对 $k = 1, 2, \dots, n$, 有

$$\begin{aligned} d_j^{(k+1)} &= d_j^{(k)} - a_k d_{j-1}^{(k)}, & q_j^{(k+1)} &= q_j^{(k)} - a_k q_{j-1}^{(k)}, & j &= k+1, k+2, \dots, n+1, \\ w_j^{(n+1)} &= d_j^{(j)}, & z_j^{(n+1)} &= q_j^{(j)}, & j &= 1, 2, \dots, n+1. \end{aligned}$$

对 $k = n, \dots, 2, 1$, 有

$$\begin{aligned} u_i^{(k+1)} &= w_i^{(k+1)}, & v_i^{(k+1)} &= z_i^{(k+1)}, & i &= 1, 2, \dots, k, \\ u_j^{(k+1)} &= w_j^{(k+1)} / (a_j - a_{j-k}), & v_j^{(k+1)} &= z_j^{(k+1)} / (a_j - a_{j-k}), & j &= k+1, k+2, \dots, n+1, \\ w_i^{(k)} &= u_i^{(k+1)}, & z_i^{(k)} &= v_i^{(k+1)}, & i &= 1, 2, \dots, k-1, \\ w_j^{(k)} &= u_j^{(k+1)} - u_{j+1}^{(k+1)}, & z_j^{(k)} &= v_j^{(k+1)} - v_{j+1}^{(k+1)}, & j &= k, k+1, \dots, n, \\ w_{n+1}^{(k)} &= u_{n+1}^{(k+1)}, & z_{n+1}^{(k)} &= v_{n+1}^{(k+1)}, & w_j &= w_j^{(1)}, & z_j &= z_j^{(1)}, & j &= 1, 2, \dots, n+1, \\ y_i &= w_i + w_{n+1} z_i / (1 - z_{n+1}), & i &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

该算法需 $(5n^2/2) + (5n/2) + 1$ 次乘除运算和 $3n^2 + 5n$ 次加减运算。

3 数值算例

我们针对一些广义 Vandermonde 矩阵 V , 在微机 (CPU 奔 IV2.6G, 内存 256MB) 上编程计算, 分别用本文所给的快速算法、Gauss 消元法和 Gohberg-Kailath-Koltracht 算法 (简记为 GKK 算法) 求解广义 Vandermonde 方程组 $V^T x = f$ 和 $Vy = g$, 部分算例如下。

例1 求解广义 Vandermonde 方程组 $V^T x = f$, 其中

$$a_i = -1 + 2(i-1)/n, \quad f_i = T_{n-1}(a_i) + 2^{n-2}(a_i^n - a_i^{n-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

这里 $T_{n-1}(x)$ 是 $n-1$ 阶 Chebyshev 多项式。为方便起见，取 n 为奇数。该方程组的精确解为 Chebyshev 多项式 $T_{n-1}(x)$ 的展开式系数，即

$$x_i^* = \frac{n-1}{2} \frac{(-1)^{\frac{n-i}{2}} (n-2-\frac{n-i}{2})!}{(\frac{n-i}{2})!(i-1)!} 2^{i-1} \quad (i \text{ 为奇数}), \quad x_i^* = 0 \quad (i \text{ 为偶数})$$

取 $a_{n+1} = 1$ ，误差用 $e = \|x^* - x\|_2$ 度量，计算结果见表 1。

表 1: 广义 Vandermonde 方程组 $V^T x = f$ 算例结果比较

n	7	11	15	19	23	27
快速算法1	1.77e-13	8.13e-11	2.74e-08	3.24e-06	6.01e-04	9.30e-01
高斯消元法	3.86e-13	1.16e-09	3.22e-06	3.46e-03	6.88e+00	
GKK算法	5.84e-11	2.62e-06	4.12e-01	3.16e+07		

例 2 求解广义 Vandermonde 方程组 $Vy = g$ ，其中

$$a_i = \frac{1}{i+2}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$
$$g_i = \frac{1}{2^{i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad g_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1} C_n^j}{j+2}.$$

这里 $C_n^j = n(n-1)\cdots(n-j+1)/j!$ 。该方程组的精确解为

$$y_j^* = (-1)^{j-1} C_n^j (1+j/2)^{n-1}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

取 $a_{n+1} = \frac{1}{n+3}$ ，误差用

$$e = \max_{1 \leq j \leq n} \frac{|y_j^* - y_j|}{|y_j^*|}$$

度量，计算结果见表 2。

表 2: 广义 Vandermonde 方程组 $Vy = g$ 算例结果比较

n	4	8	12	16	20
快速算法2	9.47e-15	8.27e-13	1.76e-10	7.91e-06	3.65e-01
高斯消元法	1.38e-14	1.25e-09	2.27e-05	1.03e+00	
GKK算法	5.92e-16	1.54e-05	1.00e+00		

数值算例表明，与 Gauss 消元法和 Gohberg-Kailath-Koltracht 算法相比，本文的算法具有更高的计算精度。由于广义 Vandermonde 矩阵是严重病态的，所以以上算例中矩阵的阶数不高。本文研究的广义 Vandermonde 方程组的快速算法很容易推广到矩阵为一般跳行的情形。

参考文献:

- [1] Björck A, Pereyra V. Solution of Vandermonde systems of equations[J]. Math Comp, 1970, 24: 893-903
- [2] Gohberg I, Kailath T, Koltracht I. Efficient solution of linear systems of equations with recursive structure[J]. Linear Algebra Appl, 1986, 80: 81-113
- [3] Higham N J. Fast solution of Vandermonde-like systems involving orthogonal polynomials[J]. IMA J Numer Anal, 1988, 8: 473-486
- [4] 徐仲. Vandermonde矩阵类的快速算法[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1997
Xu Z. Fast Algorithm of Vandermonde-like Matrices[M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 1997
- [5] 徐仲, 游兆永. Vandermonde类矩阵之方程组的递进算法[J]. 数值计算与计算机应用, 1997, 4: 13-22
Xu Z, You Z Y. Progressive algorithms for the solution of the Vandermonde-like systems[J]. Journal on Numerical Methods and Computer Applications, 1997, 4: 13-22
- [6] 徐仲, 张凯院, 陆全. Toeplitz矩阵类的快速算法[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1999
Xu Z, Zhang K Y, Lu Q. Fast Algorithm for Toeplitz-like Matrices[M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 1999
- [7] 陆全, 徐仲, 叶正麟. Hankel矩阵和Vandermonde矩阵之逆的新矩阵表示式及快速算法[J]. 陕西师范大学学报(自然科学版), 2005, 33(1): 11-14
Lu Q, Xu Z, Ye Z L. New expressions and fast algorithms for inverse of Hankel matrix and Vandermonde matrix[J]. Journal of Shaanxi Normal University (Natural Science Edition), 2005, 33(1): 11-14
- [8] Lu X F, Xu Z, Lu Q, et al. A fast algorithm of the inverse of Vandermonde-type matrix[C]// Proceedings of the Seventh International Conference on Matrix Theory and its Applications, 2006, 17-19: 246-249

An Efficient and Fast Algorithm for Solving Generalized Vandermonde Systems

ZHAO Liang-dong, XU Zhong, LU Quan

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

Abstract: In this paper, an efficient and fast algorithm for solving generalized Vandermonde systems is obtained on basis of the Björck-Pereyra algorithm for solving Vandermonde systems. The algorithm costs $O(n^2)$ arithmetic operations. Numerical results show that the algorithm is higher in precision than the Gauss elimination and Gohberg-Kailath-Koltracht algorithm when solving Vandermonde-type systems.

Keywords: Vandermonde matrix; generalized Vandermonde matrix; linear systems; fast algorithm

Received: 26 June 2008. **Accepted:** 24 Dec 2008.

Foundation item: The Natural Science Foundation of China (10802068); the Natural Science Foundation of Shanxi Province (2006A05).